Theoretische Physik C **(Abgabe bis 13. November 2020, 23:59)**

Hausübung 4

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Kommutierende Operatoren

(1+1+3+1=6 Punkte)

In einem drei-dimensionalen komplexen Zustandsraum $\mathbb{C}^3$ seien zwei Operatoren durch ihre Wirkung auf die Vektoren der orthonormierten Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ folgendermaßen definiert:

$$
\begin{aligned}
A|1\rangle &= 3|1\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle\,, & B|1\rangle &= |1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle \\
A|2\rangle &= \mathrm{i}\sqrt{2}|1\rangle + 2|2\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|3\rangle\,, & B|2\rangle &= -\mathrm{i}\sqrt{2}|1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|3\rangle \\
A|3\rangle &= |1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|2\rangle + 3|3\rangle\,, & B|3\rangle &= |1\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle
\end{aligned}
$$

[**HÜ 1.1**] Was sind die den Operatoren A und B bezüglich dieser Basis zugeordneten Matrizen?

[**HÜ 1.2**] Zeigen Sie, dass die Operatoren A und B hermitesch sind und dass sie miteinander kommutieren.

[**HÜ 1.3**] Bestimmen Sie die Eigenwerte a und b von A bzw. B, deren Vielfachheiten sowie eine Orthonormalbasis $\{|\mathrm{I}\rangle, |\mathrm{II}\rangle, |\mathrm{III}\rangle\}$ simultaner Eigenzustände von A und B.

Hinweis: Betrachten Sie das Eigenwertproblem zu A. Bestimmen Sie erst den Eigenvektor $|\mathrm{I}\rangle$ zum einfachen Eigenwert a_1. Ein Eigenvektor zum doppelten Eigenwert $a_2 = a_3$ lautet $|\mathrm{II}\rangle = \frac{1}{2}(|1\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|2\rangle - |3\rangle)$. Konstruieren Sie den dritten Eigenvektor orthogonal zu $|\mathrm{I}\rangle$ und $|\mathrm{II}\rangle$.

[**HÜ 1.4**] Welche Matrizen sind A und B bezüglich der Basis $\{|\mathrm{I}\rangle, |\mathrm{II}\rangle, |\mathrm{III}\rangle\}$ zugeordnet?

Aufgabe 2: Kaon-Oszillationen

(1+1+2=4 Punkte)

In der Vorlesung und der Präsenzübung haben Sie die Zeitentwicklung des Kaon-Systems studiert. In dieser Aufgabe lernen Sie, dass Sie diese mithilfe eines Operators, dem Zeitentwicklungsoperator $U(t)$, beschreiben können.

Definieren Sie dazu

$$U(t) = e^{-\mathrm{i}\alpha_S t}|K_S\rangle\langle K_S| + e^{-i\alpha_L t}|K_L\rangle\langle K_L| \quad \text{mit} \quad \alpha_{S/L} = \omega_{S/L} - \mathrm{i}\lambda_{S/L} \;\text{ und }\; \omega_{S/L}, \lambda_{S/L} \in \mathbb{R}\,.$$

Wie Sie nächste Woche lernen werden, lässt sich zu jedem Quantensystem ein Zeitentwicklungsoperator finden.

[**HÜ 2.1**] Es sei wie in der Vorlesung $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S\rangle + |K_L\rangle)$. Prüfen Sie nach, dass $|\psi(t>0)\rangle = U(t)|\psi(t=0)\rangle$ mit dem in der Vorlesung angegebenen Ergebnis übereinstimmt.

[HÜ 2.2] Bestimmen Sie die Matrixdarstellung des Zeitentwicklungsoperators $U(t)$ bezüglich der $\{|K^0\rangle, |\bar{K}^0\rangle\}$ Basis.

Hinweis: $|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$ *und* $|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle.)$

[HÜ 2.3] Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeit $K^0 \to \bar{K}^0$ als Funktion der Zeit mit Hilfe des in **[HÜ 2.2]** gefundenen Zeitentwicklungsoperators. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit, dass man erkennt, dass es reelle Zahlen für die Wahrscheinlichkeit liefert.

Hinweis: $W(t) = |\langle\bar{K}^0|U(t)|K^0\rangle|^2$ *benötigt in dieser Basis nur* ***ein*** *Matrixelement von* $U(t)$.